（ 様式D－２ ）
（ 別　　紙 ）

令和７年度　海外派遣研究員研究報告書〔研究実績〕

令和　７年　９月１６日

日本大学理事長　　殿
日 本 大 学 学 長　　殿

所　　属　　理工学部　（理工学研究所）
資格・氏名　　助教・長峰　孝典

令和７年度海外派遣研究員（　短期Ｂ　）の研究実績を，下記のとおり報告いたします。

記

１　区　　分　　短期Ｂ

２　研 究 課 題

特殊線形群の作用を持つ代数多様体の分類を用いたザリスキ消去問題に関する研究

３　派 遣 期 間　　西暦２０２５年　８月２９日　～　２０２５年　９月１５日

４　派　遣　先　　米国

５　研 究 目 的

本研究は，代数学，特に代数幾何学と呼ばれる分野に属する。代数幾何学は，代数多様体と呼ばれる幾何学的対象 (図形) を調べる分野である。本研究の目的は，代数多様体のうち，2 次の特殊線形群SL_2 (行列式の値が 1 である行列がなす群) が作用するものの構造を明らかにすることである。そして，ザリスキの消去問題 (後述) が肯定的に解決する代数多様体の族を与え，高次元代数多様体の研究に対し，新しい手法や道具を与える。

ザリスキ消去問題とは「代数多様体Xが直線Lに対し，$X \times L = \mathbb{A}^n \times L$ をみたす時 $X = \mathbb{A}^n$ となるか」を問う問題である。ここで$\mathbb{A}^n$は，n次元のアフィン空間を意味する (例えば$\mathbb{A}^2$はxy平面，$\mathbb{A}^3$はxyz空間である)。藤田隆夫氏 (1979 年)，宮西正宜氏及び杉江徹氏 (1980 年) らの研究により，この問題はXの次元が 2 以下の場合には肯定的である。しかしながら，3 次元以上の場合では 2014 年に Neena Gupta 氏が反例を構成し，多くの数学者に衝撃を与えた (世界で最も権威のある数学雑誌の 1 つである Inventiones mathematicae から出版)。したがって，ザリスキ消去問題は一般には成立しない。

一方，ザリスキ消去問題が肯定的となる場合，直線Lを消去して代数多様体の次元を下げることができる。これは，高次元の研究が低次元の場合に帰着できることを意味する。そのため，応用上はザリスキ消去問題が肯定的となる代数

多様体の条件を明らかにすることが求められている。その条件の候補の一つが「SL_2の作用を持つこと」である。本研究では，SL_2作用に詳しい Gene Freudenburg 氏 (アメリカ・西ミシガン大学) の元へ訪れ議論を行い，この条件がザリスキ消去問題を肯定的とするかどうかを明らかにする。特に，ザリスキ消去問題の反例が現れる 3 次元 (やそれ以上の次元) の場合に取り組む。

6　研 究 概 要

① 研究の方法

まずは，SL_2作用から生じる$\mathbb{G}_a$作用を調べるのが理にかなっている。$\mathbb{G}_a$とは，基礎体の加法群である。$\mathbb{G}_a$作用があるかどうか，あるとすればどのくらいの種類が存在するのかを調べることで，代数多様体の構造を明らかにすることができる。明らかにしたいことは，与えられた代数多様体と$\mathbb{A}^n$との差異であるため，$\mathbb{A}^n$における$\mathbb{G}_a$作用が持つ性質を明らかにする必要がある。さらに，$\mathbb{G}_a$作用は考えている代数多様体における偏微分作用素に対応している。特にその作用素は，局所冪零導分 (Locally Nilpotent derivation，以下 LND) と呼ばれる。$\mathbb{A}^n$の座標環はn変数の多項式環であるため，多項式環における LND はどのような種類があるかを明らかにする必要がある。なお，多項式環ではたくさんの LND が存在することは既知であり，2 変数以下では完全に分類されている。そのため，3 変数以上の場合が問題となる。特に，LND の階数 (rank) と呼ばれる概念に本研究は着目した。これは LND の複雑さを表す量で，考えている多項式環の変数 (アフィン空間の次元と同じ) をnとした時，$1, 2, \dots, n$までのn通りの値をとる。値が大きいほど複雑さが増し，階数nの LND は扱いが困難である。

② 渡航先での活動内容

渡航先では 3 変数の場合に限定して議論をした。さらに，以下の問題について研究を進めた。以下$k = \mathbb{C}$ (複素数体) とし，$B = k[x, y, z]$で 3 変数多項式環を表す。また，$D: B \to B$を多項式環Bにおける LND とし，その核を$A = \ker D$で表す。

課題(A) $D^3(x) = D^3(y) = D^3(z) = 0$をみたす$D$がもつ性質を明らかにせよ。

課題(B) $D^2(x) = 0$をみたすDがもつ性質を明らかにせよ。

課題(A)は，[Wang，1999]の先行研究に基づくもので，Wang は$D^2(x) = D^2(y) = D^2(z) = 0$の時，$D$の階数が 2 以下となることを示した。課題(B)は課題(A)に取り組む中で発見した課題で，Wnag の定理の一般化を目指したものである。我々は次の予想を立て，研究に取り組んだ。

<u>予想</u>

3 変数多項式環$B := k[x, y, z]$上の LND をDとする。Dが$D^2(x) = 0$をみたす時，Dの階数は 2 以下である。つまり，$B = k[f, g, h]$かつ$f \in A := \ker D$をみたすものが存在する。

7　研究結果・成果

以下Dを 3 変数多項式環$B = k[x,y,z]$上の LND で$D^2(x) = 0$をみたすものとする。$h := D(x)$とおく。例えば，次のように定義された LND はこの条件をみたす。

$$D = z\frac{\partial}{\partial x} + f(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y}$$

ただし，$f(x,y,z) \in B$とする。実際，$D: x \mapsto z \mapsto 0$となり$D^2(x) = 0$をみたす。

渡航中の研究により得られた成果は以下のとおりである。

(1)　Dの固定点集合$F(D)$の次元は 1 である。つまり，$F(D)$は有限個の曲線の和集合として表される。

(2)　$c \in k$に対し，以下の連立方程式

$$\begin{cases} h(x,y,z) = 0 \\ x = c \end{cases}$$

により定まる代数多様体をX_cとする。この時，共通集合$F(D) \cap X_c$は，有限個の$c \in k$を除き空集合である。

(3)　$h_c := h(c,y,z)$は$k[y,z]$の中で単座標である。つまり，

$$\exists f_c, g_c \in k[y,z] \ \text{ s.t. } \ k[y,z] = k[f_c, g_c] \text{ かつ } h_c \in k[f_c]$$

が成り立つ。以下でそれぞれの事項について説明する。

(1)について

固定点集合$F(D)$とはDに対応する$\mathbb{G}_a$作用で固定される点の集合である。つまり，

$$F(D) = \{p \in k^3 \mid \sigma(p) = p, \forall\, \sigma \in \mathbb{G}_a\}$$

である。したがって，$F(D)$の次元の可能性は$\{0,1,2,3\}$の 4 通りである。本研究では，$D^2(x) = 0$の条件下では$\dim F(D) = 1$となることを明らかにした。これにより

$$F(D) = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$$

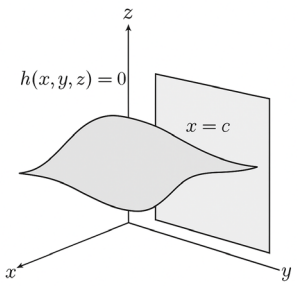
ただし，D_iは既約な曲線である。

(2)について

X_cは曲面$\{h(x,y,z) = 0\}$と平面$\{x = c\}$との共通集合である。それを図で示したものが以下である。

図のように，その交わりは曲線になる。一般に，複数の箇所で交わる可能性があるため，X_cも$F(D)$と同様に有限個の曲線の和集合となる。したがって，既約曲線C_iを使って以下のように表される。

$$X_c = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$



〔７　研究結果・成果（つづき）〕

ここで$F(D) \cap X_c \neq \emptyset$と仮定し，点$p \in F(D) \cap X_c$を取る。$p \neq q \in X_c \setminus F(D)$に対して$\mathbb{G}_a$作用の軌道を考えると，$q$は固定点ではないため，$\mathbb{G}_a q \cong \mathbb{A}^1$となる。さらに，$X_c$は$\mathbb{G}_a$作用で閉じているため，$\mathbb{A}^1 \cong \mathbb{G}_a q \subset X_c$となる。$X_c$内には有限個曲線しか存在しないため，このような点は有限個に限られる。したがって，$F(D)$の各既約成分D_iに対して$c \in k$とX_cの既約成分C_jを適切に選ぶことで$D_i = C_j$とできる。これにより，$F(D) \cap X_c \neq \emptyset$となる c$\in k$は高々$m$個 ($F(D)$の既約成分の個数)となることが分かる。

(3)について

(2)よりほとんど全ての$c \in k$に対し，$F(D) \cap X_c = \emptyset$である。これは，$X_c$における$\mathbb{G}_a$作用の固定点がないことを意味する。$X_c$は 1 次元で，固定点を持たない$\mathbb{G}_a$作用を持つため，[Abhyankar-Moh，1975]及び[Suzuki，1974]の定理を用いると，$h_c \coloneqq h(c, y, z)$が$k[y, z]$の中で単座標となる。

今後の課題

(1)，(2)，(3)の成果により，$D^2(x) = 0$をみたす LND であるDに対し，$h := D(x)$がみたす性質が明らかになった。我々の予想である「Dの階数は 2 以下」の証明を完成させるためには，$h \in k[f]$をみたす座標$f \in B$で，$f \in A$となるものの存在が言えれば良い。その候補として，(3)で得られたf_c ($c \in k$は有限個を除いて任意)から構成する方法が考えられる。

現在は，メールのやり取りや Overleaf の共同編集機能を用いて，この点に関して議論を進めている。これらの議論が完成すれば，我々の予想は肯定的に解決する。

以　　上